Chapitre 2

Chapitre II : Résolution des systèmes d'équation linéaires par des méthodes directes.

2.1 *Introduction*

Les systèmes d'équations linéaires sont associés à beaucoup de problèmes en sciences de l'ingénieur et en sciences fondamentales, ainsi qu'à des applications des mathématiques en sciences sociales et dans les études quantitatives aux problèmes de commerce et d'économie. Dans les sciences de l'ingénieur les systèmes d'équations linéaires (ou non linéaires) trouvent leur application, par exemple, dans la détermination des :

- Contraintes et déplacements dans des structures mécaniques chargées.
- Courants et tensions dans des réseaux électriques.
- Débits de chaleur dans des réseaux de chauffage.
- Coefficients de régression par la méthode des moindres carrés.
- La solution numérique d'équations différentielles partielles.
- La solution optimale en programmation linéaire.

Exemples de systèmes d'équations

Systèmes d'équations linéaires :

$$\begin{cases} 5t + 3x + 2y = 5 \\ 9t + 6x + 7y = 8 \\ 11t + x - y = 13 \end{cases}$$

Systèmes d'équations non linéaires :

$$\begin{cases} 5t^4 + 3x^{1/2} + 2y^3 = 5 \\ 9t^5 + 6x + 7y^4 = 8 \\ 11t^{1/3} + x^6 - y^2 = 13 \end{cases}$$

Dans ce chapitre on s'intéresse aux méthodes de résolution des systèmes d'équations linéaires

$$
\begin{aligned}
E_1:&\quad a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1,\\
E_2:&\quad a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2,\\
\vdots&\qquad \vdots \qquad\quad \vdots \qquad\qquad\quad \vdots \qquad\quad \vdots\\
E_n:&\quad a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n,
\end{aligned}
\tag{2.1}
$$

- **Les *méthodes directes (ou méthodes exactes):*** ce sont des algorithmes qui conduisent à une solution après l’exécution d’un nombre fini d’étapes et sans les erreurs d’arrondi, cette solution serait la solution exacte du système linéaire.
- Les méthodes programmées pour ce chapitre ce sont la méthode de Cramer et la méthode d’élimination de Gauss.

Gabriel Cramer

2.2 Méthodes de Cramer

2.2.1 Matrice Inverse et Formules de Cramer

Le formalisme matriciel peut être utilisé pour représenter un système linéaire (2.1) de n équations E_i, $i = 1, \dots, n$, à n inconnues x_i, $i = 1, \dots, n$. Construisons tout d'abord la matrice carrée de rang $(n \times n)$

$$\boldsymbol{A} = (a_{ij}) = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$, (Matrice des coefficients du système)

et les 2 matrices colonnes $(n \times 1)$ (ou vecteurs de n composantes)

$$\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$ (Vecteur des termes constants), $$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$ (Vecteur des inconnues ou vecteur recherché).

Ceci permet de réécrire le système linéaire (2.1) sous une forme abrégée d'une équation matricielle

$$\boldsymbol{A}.\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \qquad (2.2)$$

Si la matrice $\boldsymbol{A}$ est non singulière c.-à-d. si son déterminant est non nul

$$\det \boldsymbol{A} \equiv \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \Delta \neq 0,$$

le système linéaire (2.1) possède une *solution unique*. Par conséquent il existe une matrice $\boldsymbol{A}^{-1}$ (dite matrice i*nverse*) telle que $\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-1} = \boldsymbol{I}$ où I est la matrice *Identité* $(n \times n)$. En multipliant les deux membres de l'équation (2.2) à gauche par la matrice $\boldsymbol{A}^{-1}$, on obtient

$$A^{-1}Ax = A^{-1}\boldsymbol{b}$$

$$ou$$

$$\boxed{x = A^{-1}\boldsymbol{b}}. \tag{2.3}$$

Remarque

La recherche directe de la matrice inverse A^{-1} de la matrice A de rang $n > 4$ exige un très grand temps de calcul. Pour cette raison il est rare que la formule (2.3) soit pratiquement utilisée.

On peut montrer (voir un cours d'algèbre linéaire) que la solution peut être réécrite sous la forme

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \frac{1}{\Delta}\begin{bmatrix} \Delta_1 \\ \Delta_2 \\ \vdots \\ \Delta_n \end{bmatrix}, \qquad (2.4)$$

Avec

$$\Delta_i = \sum_{j=1}^{n} A_{ji} b_j = \begin{vmatrix} a_{11} \cdots a_{1,i-1} b_1 a_{1,i+1} \cdots a_{1n} \\ a_{21} \cdots a_{2,i-1} b_2 a_{2,i+1} \cdots a_{2n} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1} \cdots a_{n,i-1} b_n a_{n,i+1} \cdots a_{nn} \end{vmatrix}$$

qui sont les déterminants déduits du déterminant Δ de la matrice $\boldsymbol{A}$ en remplaçant à son i-ème colonne la colonne des termes constants du système (2.1). L'égalité (2.4) conduit aux *formules de Cramer*

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta},\quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \dots,\quad x_n = \frac{\Delta_n}{\Delta}. \tag{2.5}$$

Donc si le déterminant du système (2.1) est $\Delta \neq 0$, le système possède une solution unique $\boldsymbol{x}$ définie par la formule matricielle (2.3) ou par les formules scalaires équivalentes (2.5).

Exemple 1

Résoudre le système d'équations linéaire

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 = 5\,, \\ -2x_1 + x_2 + x_3 = 0\,, \\ 2x_1 - x_2 + 4x_3 = 15\,. \end{cases}$$

Mettons le système sous forme matricielle

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ 15 \end{bmatrix}.$$

Le déterminant de la matrice $\boldsymbol{A}$ du système considéré

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 4 \end{vmatrix} = 5 \neq 0\,.$$

En calculant les déterminants supplémentaires on obtient :

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} \mathbf{5} & -1 & 0 \\ \mathbf{0} & 1 & 1 \\ \mathbf{15} & -1 & 4 \end{vmatrix} = 10\,;\;\; \Delta_2 = \begin{vmatrix} 3 & \mathbf{5} & 0 \\ -2 & \mathbf{0} & 1 \\ 2 & \mathbf{15} & 4 \end{vmatrix} = 5;\;\; \Delta_3 = \begin{vmatrix} 3 & -1 & \mathbf{5} \\ -2 & 1 & \mathbf{0} \\ 2 & -1 & \mathbf{15} \end{vmatrix} = 15\,.$$

D'où

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{10}{5} = 2; \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{5}{5} = 1; \quad x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{15}{5} = 3.$$

Remarque

La résolution du système linéaire (2.1) à n inconnues se ramène donc au calcul de $(n+1)$ déterminants d'ordre n. Si le nombre n est grand, le calcul des déterminants est une opération délicate. La méthode requiert $(n+1)n!+n$ multiplications/divisions et $n!-1$ additions soustractions. Ainsi pour le calcul des racines d'un système linéaire d'autres algorithmes et procédés directs ont été établis.

Exercice 1 Soit le système d'équations linéaires suivant

$$\begin{cases} E_1: -x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_4 = 1, \\ E_2: \quad x_2 + 2x_4 = 0, \\ E_3: \quad x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 0, \\ E_4: \quad 4x_1 - x_2 + 2x_4 = 0. \end{cases}$$

a) Ecrire le système sous forme matricielle ***A.x = b*** puis calculer le déterminant de la matrice ***A.***
Est-ce- que le système possède une solution unique ?

b) Donner la solution du système en utilisant les relations de Cramer.

c) En utilisant la méthode d'élimination de Gauss résoudre ce système linéaire.

Solution

Exercice 1 Le système s'écrit sous forme matricielle comme suit :

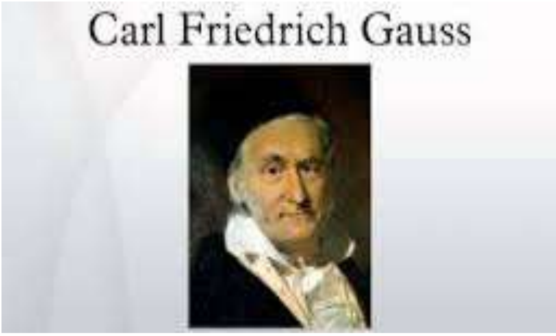
$$\begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 3 & 4 \\ 4 & -1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Avec $\det \boldsymbol{A} \equiv \Delta = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 3 & 4 \\ 4 & -1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -12 \neq 0$. Donc le système admet une solution unique.

Les formules de Cramer qui donnent les solutions de ce système s'écrivent :

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = -\frac{1}{12} \times \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -1; \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = -\frac{1}{12} \times \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 3 & 4 \\ 4 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -2;$$

$$x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = -\frac{1}{12} \times \begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 0 & 4 \\ 4 & -1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 1; \quad x_4 = \frac{\Delta_4}{\Delta} = -\frac{1}{12} \times \begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 3 & 0 \\ 4 & -1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$



2.2.3 *Méthode de Gauss*

La méthode de Gauss est parmi les méthodes les plus utilisées (sinon la plus usitée) de résolution des systèmes d'équations linéaires et est appelée algorithme d'élimination successive des inconnues (« *Gaussian Elimination* »). Pour simplifier les raisonnements, bornons nous à considérer un système de quatre équations à quatre inconnues

$$\begin{cases} E_1: & a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 = b_1, \\ E_2: & a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4 = b_2 \\ E_3: & a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + a_{34}x_4 = b_3, \\ E_4: & a_{41}x_1 + a_{42}x_2 + a_{43}x_3 + a_{44}x_4 = b_4. \end{cases} \tag{2.6}$$

ou sous forme matricielle ***A.x=b***

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{bmatrix} \tag{2.7}$$

2.2.3.1 Principe de la méthode

La méthode de Gauss consiste à *transformer* le système ***A.x=b*** (2.7) à matrice ***A*** quelconque en un système <u>*équivalent*</u> (ayant le même ensemble de solutions) ***A'.x=b'*** où ***A'*** est une matrice triangulaire supérieure : c'est ***l'élimination successive des inconnues***

$$\begin{bmatrix} a'_{11} & a'_{12} & a'_{13} & a'_{14} \\ 0 & a'_{22} & a'_{23} & a'_{24} \\ 0 & 0 & a'_{33} & a'_{34} \\ 0 & 0 & 0 & a'_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b'_1 \\ b'_2 \\ b'_3 \\ b'_4 \end{bmatrix}. \qquad (2.8)$$

L'équation matricielle ***A'.x=b'*** (2.8) s'écrit sous forme d'un système d'équations linéaires, dite **forme réduite** ou **forme triangulaire**

$$\begin{cases} E_1: & a'_{11}x_1 + a'_{12}x_2 + a'_{13}x_3 + a'_{14}x_4 = b'_1, \\ E_2: & a'_{22}x_2 + a'_{23}x_3 + a'_{24}x_4 = b'_2 \\ E_3: & a'_{33}x_3 + a'_{34}x_4 = b'_3, \\ E_4: & a'_{44}x_4 = b'_4. \end{cases} \qquad (2.9)$$

Le système (2.9) peut être *facilement* résolu pour les inconnues par une procédure de ***substitution inverse*** :

- l'équation E_4 implique que $x_4 = \frac{b_4^{'}}{a_{44}^{'}}$ (*en supposant que* $a_{44}^{'} \neq 0$);
- E_3 peut être résolue pour x_3 : $x_3 = \frac{1}{a_{33}^{'}}[b_3^{'} - a_{34}^{'}x_4]$ (*en supposant que* $a_{33}^{'} \neq 0$);
- E_2 donne: $x_2 = \frac{1}{a_{22}^{'}}[b_2^{'} - a_{23}^{'}x_3 - a_{24}^{'}x_4]$ (*en supposant que* $a_{22}^{'} \neq 0$) ;
- *et* E_1 donne : $x_1 = \frac{1}{a_{11}^{'}}[b_1^{'} - a_{12}^{'}x_2 - a_{13}^{'}x_3 - a_{14}^{'}x_4]$ (*en supposant que* $a_{11}^{'} \neq 0$).

Exemple 2 Résoudre le système d'équations

$$\begin{cases} E_1: \quad x_1 + x_2 \qquad\qquad + 3x_4 = 4, \\ E_2: \quad 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 1, \\ E_3: \quad 3x_1 - x_2 - x_3 + 2x_4 = -3, \\ E_4: \quad -x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 4. \end{cases} \tag{2.9}$$

A retenir

Pour résoudre une system tel que (2.6), trois opérations sont permises sur les équations :

1) La multiplication d'une équation E_i par une constante non nulle λ et l'équation qui en résulte est utilisée à la place de E_i. Cette opération sera désignée par $(\lambda E_i) \to (E_i)$.
2) L'équation E_j peut être multipliée par une constante λ quelconque, et additionnée à l'équation E_i, et l'équation résultante est utilisée à la place de E_i. Cette opération sera désignée par $\left(E_i + \lambda E_j\right) \to (E_i)$.
3) Les équations E_i et E_j peuvent être permutées dans leur ordre. Cette opération sera désignée par $(E_i) \leftrightarrow (E_j)$.

Par une série d'opérations citées ci-dessus, un système linéaire peut être transformé en un système linéaire plus facilement soluble et ayant le même ensemble de solutions. Cette série d'opérations sera illustrée dans la solution de l'exemple 2.

Le système linéaire (2.9) s'écrit sous forme matricielle

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 3 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ -3 \\ 4 \end{bmatrix} \tag{2.10}$$

Comme la transformation touche en même temps les éléments a_{ij} de la matrice $\boldsymbol{A}$ et les composantes b_i du vecteur $\boldsymbol{b}$, introduisons, pour la commodité des opérations de calcul, la matrice augmentée

$$\tilde{A} \equiv [A, \boldsymbol{b}] = \tilde{A}^{(1)} = \left[\begin{array}{cccc:c} 1 & 1 & 0 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & -1 & 2 & -3 \\ -1 & 2 & 3 & -1 & 4 \end{array}\right], \tag{2.11}$$

où la ligne en pointillés est utilisée pour séparer les coefficients des inconnues des valeurs des membres de droite des équations.

La première étape est d'utiliser l'équation E_1 pour éliminer l'inconnue x_1 dans E_2, E_3 et E_4 en effectuant $(E_2 - 2E_1) \longrightarrow (E_2), (E_3 - 3E_1) \longrightarrow (E_3)$, et $(E_4 + E_1) \longrightarrow (E_4)$. Le système résultant est :

$$\tilde{A}^{(2)} = \left[\begin{array}{cccc:c} 1 & 1 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & -1 & -5 & -7 \\ 0 & -4 & -1 & -7 & -15 \\ 0 & 3 & 3 & 2 & 8 \end{array}\right]. \tag{2.12}$$

Dans le nouveau système, E_2 est utilisée pour éliminer x_2 de E_3 et E_4 par les opérations $(E_3 - 4E_2) \longrightarrow (E_3)$ et $(E_4 + 3E_2) \longrightarrow (E_4)$ ce qui débouche sur le système

$$\tilde{A}^{(3)} = \left[\begin{array}{cccc:c} 1 & 1 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & -1 & -5 & -7 \\ 0 & 0 & 3 & 13 & 13 \\ 0 & 0 & 0 & -13 & -13 \end{array}\right] \qquad (2.13)$$

Le système d'équations (2.13) est maintenant dans une **forme triangulaire** ou **forme réduite**. La procédure incluse dans ce processus est **l'élimination successive des inconnues.** Les solutions pour x_1, x_2,x_3 et x_4 sont facilement données par **substitution inverse** :

- E_4 implique que $x_4 = 1$,
- E_3 peut être résolue pour x_3 : $x_3 = \frac{1}{3}(13 - 13x_4) = 0.$
- E_2 donne : $x_2 = -(-7 + 5x_4 + x_3) = 2$;
- et E_1 donne : $x_1 = 4 - 3x_4 - x_2 = -1.$

La solution du système linéaire (2.13) est donc $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$. Il est facile de vérifier que ces valeurs sont aussi solutions du système linéaire (2.9).

2.2.3.2 Algorithme de la méthode de Gauss

La procédure générale de la méthode de Gauss appliquée au système linéaire

$$\begin{array}{llll} E_1: & a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ E_2: & a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \vdots & \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad\quad \vdots \qquad \vdots \\ E_n: & a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n . \end{array} \tag{2.14}$$

est traitée de manière similaire à la démarche suivie dans l'exemple précédent. Formons la matrice augmentée

$$\tilde{A} \equiv [A, \boldsymbol{b}] = \left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & a_{1,n+1} \\ a_{11} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & a_{2,n+1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & a_{1,n+1} \end{array}\right], \tag{2.15}$$

où $\tilde{A}$ désigne la matrice formée par les coefficients des inconnues du système et les entrées de la $(n+1)$-iéme colonne qui représentent les valeurs de $\boldsymbol{b}$ c.-à-d. $a_{i,n+1} = b_i$, pour chaque $i = 1, 2, \ldots, n$.

A condition que $a_{11} \neq 0$, les opérations correspondants à $\left(E_j - \left(a_{j1}/a_{11}\right)E_1\right) \to \left(E_j\right)$ sont effectuées pour chaque $j = 2, 3, \ldots, n$ pour éliminer le coefficient de x_1 dans chacune des lignes $E_2, E_3, \ldots, E_n$.

Bien que les entrées dans les lignes $2,3,\dots,n$ sont susceptibles de changer, nous désignerons cependant, pour faciliter la notation, les entrées dans la $i-ème$ ligne et la $j-ème$ colonne par a_{ij} .

On poursuit une procédure séquentielle pour $i = 2,3,\dots,n-1$ et exécutons l'opération $\left(E_j - \left(a_{ji}/a_{ii}\right)E_i\right) \rightarrow \left(E_j\right)$ pour chaque $j = i+1, i+2,\dots,n$ à condition que $a_{ii} \neq 0$. Ceci élimine x_i (c.-à-d. rend le coefficient dex_i égal à zéro) dans chaque ligne en dessous de la $i-ème$ ligne pour tout $i = 1,2,\dots,n-1$. La matrice augmentée résultante aura la forme

$$\tilde{A}' = \left[\begin{array}{cccc:c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & a_{1,n+1} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{1n} & a_{1,n+1} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{nn} & a_{1,n+1} \end{array}\right],$$

où les valeurs de a_{ij} , comme cela a été mentionné, ne devraient pas être ceux de la matrice augmentée originale $\tilde{A}$. Cette matrice représente un système linéaire avec les mêmes solutions que pour le système (2.14). Comme le système linéaire équivalent est triangulaire :

$$
\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= a_{1,n+1}, \\
a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= a_{2,n+1}, \\
&\ \ \vdots \\
a_{nn}\,x_n &= a_{n,n+1},
\end{aligned}
$$

donc la **substitution inverse** (en arrière) peut être effectuée. La résolution de la $n-ième$ équation pour x_n donne :

$$x_n = \frac{a_{n,n+1}}{a_{nn}}.$$

La résolution de la $(n-1)ième$ équation pour x_{n-1} en utilisant x_n donne

$$x_{n-1} = \frac{\left[a_{n-1,n+1} - a_{n-1,n}x_n\right]}{a_{n-1,n-1}}$$

et en continuant le processus, on obtient :

$$x_i = \frac{\left[a_{i,n+1} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}\, x_j\right]}{a_{ii}} \quad \forall\, i = n-1, n-2, \cdots, 2, 1.$$

Nous allons exposer maintenant la procédure générale de la méthode, de manière plus précise mais néanmoins plus complexe. On construit par récurrence des matrices augmentées $\tilde{A}^{(1)}, \tilde{A}^{(2)}, \ldots, \tilde{A}^{(n)}$ où $\tilde{A}^{(1)}$ est la matrice augmentée du système (2.15), $\tilde{A}^{(n)}$ est la matrice augmenté du système triangulaire qu'on résout et, pour $k = 1\ 2, \ldots, n$, la matrice augmentée $\tilde{A}^{(k)}$ a pour entrées $a_{ij}^{(k)}$ où

$$a_{ij}^{(k)} = \begin{cases} a_{ij}^{(k-1)} & quand\ i = 1,2,\dots,k-1\ et\ j = 1,2,\dots,n+1 \\ 0 & quand\ i = k,k+1,\dots,n\ et\ j = 1,2,\dots,k-1 \\ a_{ij}^{(k-1)} - \dfrac{a_{i,k-1}^{(k-1)}}{a_{k-1,k-1}^{(k-1)}} a_{k-1,j}^{(k-1)} & quand\ i = k,k+1,\dots,n\ et\ j = k,k+1,\dots,n+1. \end{cases}$$

Donc

$$\tilde{A}^{(k)} = \left[\begin{array}{cccccccc|c} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & a_{13}^{(1)} & \cdots & a_{1,k-1}^{(1)} & a_{1k}^{(1)} & \cdots & a_{1n}^{(1)} & a_{1,n+1}^{(1)} \\ 0 & a_{22}^{(2)} & a_{23}^{(2)} & \cdots & a_{2,k-1}^{(2)} & a_{2k}^{(2)} & \cdots & a_{2n}^{(2)} & a_{2,n+1}^{(2)} \\ & & & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ & & & & a_{k-1,k-1}^{(k-1)} & a_{k-1,k}^{(k-1)} & \cdots & a_{k-1,n}^{(k-1)} & a_{k-1,n+1}^{(k-1)} \\ & & & & 0 & a_{k,k}^{(k)} & \cdots & a_{k,n}^{(k)} & a_{k,n+1}^{(k)} \\ & & & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & & & & 0 & a_{n,k}^{(k)} & \cdots & a_{n,n}^{(k)} & a_{n,n+1}^{(k)} \end{array}\right].$$

Remarquons qu'à l'étape k de l'élimination successive des inconnues, seules les lignes et colonnes $k+1$ à n sont modifiées. Cela veut dire que de façon pratique on n'a pas besoin de conserver les différentes versions de $\tilde{A}^{(k)}$. On travaille donc avec la matrice augmentée originale $\tilde{A}^{(1)}$ dans laquelle on écrase au fur et à mesure les anciens termes.

Attention !

L'algorithme peut s'arrêter de fonctionner si à une étape quelconque k, l'élément $a_{k,k}^{(k)}$ appelé ***pivot*** s'annule ($a_{k,k}^{(k)} = 0$). Dans ce cas l'opération

$$\left(E_i - \left(\frac{a_{i,k}^{(k)}}{a_{kk}^{(k)}}\right)E_k\right) \longrightarrow E_i$$

ne peut être exécutée (cela se passe quand l'un des pivots $a_{11}^{(1)}, \dots, a_{n-1,n-1}^{(n-1)}$ est nul) ni la substitution inverse ne peut être accomplie (dans le cas où $a_{nn}^{(n)} = 0$). Cette situation peut malheureusement se produire même si la matrice est régulière (une solution unique existe) comme le montre l'exemple suivant :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

où $a_{11}^{(1)} = 0$! En examinant ce petit exemple, on voit qu'en permutant les deux lignes de A l'élimination de Gauss est toute faite ! On peut donc espérer qu'en ***permutant*** les lignes et/ou les colonnes on puisse toujours trouver un pivot non nul.

Pour résumer l'entière procédure de la méthode de Gauss avec ses deux étapes en l'occurrence l'élimination successive des inconnues et la substitution inverse, nous présentons l'algorithme suivant.

Pour résoudre le système linéaire $n \times n$ (2.14)

$$\begin{array}{ll} E_1: & a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ E_2: & a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \vdots & \vdots \\ E_n: & a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n . \end{array}$$

ENTREES nombre d'inconnues et d'équations n ; la matrice augmentée

$A = (a_{ij})$ $où\ 1 \leq i \leq n\ \ et\ 1 \leq j \leq n+1$; avec $b_i = a_{i,n+1},\ \ i = 1, \dots, n.$

SORTIES solution $x_1, x_2, \dots, x_n$ ou message que le système n'a pas de solution unique.

Pour $k = 1\ jusqu'à\ n-1\ \boldsymbol{faire}$ *(processus de l'élimination des inconnues)*

Pour $i = k+1\ jusqu'à\ n\ \boldsymbol{faire}$

$c \leftarrow a_{ik}/a_{kk}$

Pour $j = k\ jusqu'à\ n+1\ \boldsymbol{faire}$

$a_{ij} \leftarrow a_{ij} - c\,a_{kj}$

Finpour

Finpour

Finpour

Si $a_{nn} = 0$ **alors SORTIE** ('pas de solution unique') ;

STOP.

Finsi.

Poser $x_n \leftarrow a_{n,n+1}/a_{nn}$. (*Début de la substitution inverse.*)

Pour $i = n - 1\ jusqu'$ à $1\ \boldsymbol{faire}$

$$x_i = \left[a_{i,n+1} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}\, x_j\right]/a_{ii}$$

Finpour

SORTIE $(x_1, \dots, x_n)$; (*Procédure terminée avec succès.*)

STOP.

2.2.4 Calcul d'une matrice inverse par la méthode de Gauss

Soit la matrice régulière (ou non singulière) $\boldsymbol{A} = (a_{ij})$ $(i, j = 1,2, \dots, n)$ (c.-à-d. $\det \boldsymbol{A} \neq 0$)

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

Pour trouver sa matrice inverse $\boldsymbol{A}^{-1} = (x_{ij})$ $(i, j = 1,2, \dots, n)$

$$\boldsymbol{A}^{-1} = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{nn} \end{bmatrix},$$

on utilise la relation principale $\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-1} = \boldsymbol{I}$, où $\boldsymbol{I}$ est la matrice unité ou Identité $n \times n$

$$\boldsymbol{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}.$$

En multipliant la matrice A par la j *-ième* colonne de la matrice A^{-1} on obtient le produit

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{1j} \\ x_{2j} \\ \vdots \\ x_{nj} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{k=1}^{n} a_{1k} x_{kj} \\ \sum_{k=1}^{n} a_{2k} x_{kj} \\ \vdots \\ \sum_{k=1}^{n} a_{nk} x_{kj} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

, où la valeur 1 apparaît dans la j-ième ligne

Ainsi pour trouver A^{-1}, nous devons résoudre n systèmes linéaires où la j-ième colonne de la matrice inverse est la solution du système linéaire dans lequel le membre de droite est la j-ième colonne de la matrice identité I. L'exemple suivant va illustrer la méthode requise.

Exemple3

Soit la matrice

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Pour calculer $\boldsymbol{A}^{-1}$, on doit résoudre les trois systèmes linéaires suivants

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 1, \\ 2x_1 + x_2 = 0, \\ -x_1 + x_2 + 2x_3 = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 0, \\ 2x_1 + x_2 = 1, \\ -x_1 + x_2 + 2x_3 = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 0, \\ 2x_1 + x_2 = 0, \\ -x_1 + x_2 + 2x_3 = 1. \end{cases}$$

Comme les trois systèmes ont la même matrice $\boldsymbol{A}$ mais les membres de droite différents, ils peuvent être résolus *simultanément* par la méthode de Gauss en effectuant les calculs sur une matrice augmentée plus large en combinant les matrices :

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right].$$

Pour exécuter la tache, le même ensemble de transformations est appliqué à chaque système. En premier lieu effectuons $(E_2 - 2E_1) \to (E_2), (E_3 + E_1) \to (E_3)$,

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc}1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & -3 & 2 & -2 & 1 & 0\\ 0 & 3 & 1 & 1 & 0 & 1\end{array}\right].$$

Ensuite, effectuons $(E_3 + E_2) \longrightarrow (E_3)$,

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc}1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & -3 & 2 & -2 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 3 & -1 & 1 & 1\end{array}\right].$$

La substitution inverse peut être maintenant effectuée sur chacune des trois matrices augmentées

$$\left[\begin{array}{ccc|c}1 & 2 & -1 & 1\\ 0 & -3 & 2 & -2\\ 0 & 0 & 3 & -1\end{array}\right], \quad \left[\begin{array}{ccc|c}1 & 2 & -1 & 0\\ 0 & -3 & 2 & 1\\ 0 & 0 & 3 & 1\end{array}\right], \quad \left[\begin{array}{ccc|c}1 & 2 & -1 & 0\\ 0 & -3 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 3 & 1\end{array}\right],$$

Ce qui donne les résultats suivants, respectivement, pour les trois systèmes

$$1^{\text{er}} \text{ système } \begin{cases} x_3 = -\frac{1}{3} \\ x_2 = \frac{4}{9} \\ x_1 = -\frac{2}{9} \end{cases}, \quad 2^{\text{ème}} \text{ système } \begin{cases} x_3 = \frac{1}{3} \\ x_2 = -\frac{1}{9} \\ x_1 = \frac{5}{9} \end{cases}, \quad 3^{\text{ème}} \text{ système } \begin{cases} x_3 = \frac{1}{3} \\ x_2 = \frac{2}{9} \\ x_1 = -\frac{1}{9} \end{cases}.$$

Donc

$$\boldsymbol{A}^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{2}{9} & \frac{5}{9} & -\frac{1}{9} \\ \frac{4}{9} & -\frac{1}{9} & \frac{2}{9} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} = \frac{1}{9}\begin{bmatrix} -2 & 5 & -1 \\ 4 & -1 & 2 \\ -3 & 3 & 3 \end{bmatrix}.$$

2.2.5 Application de la méthode de Gauss au calcul des déterminants

Un concept fondamental de l'algèbre linéaire qui est très utile dans la détermination de l'existence et l'unicité des solutions de systèmes d'équations linéaires est celui du **déterminant** d'une matrice $(n \times n)$. Nous recommandons au lecteur de se référer à un livre d'algèbre linéaire pour les définitions et les procédés de calcul des déterminants. Dans ce qui suit nous allons énumérer certaines propriétés des déterminants qui seront utiles à relier les systèmes linéaires et la méthode d'élimination de Gauss aux déterminants (sans pour autant donner la démonstration qui pourrait être trouvée dans n'importe quel ouvrage d'algèbre linéaire).

Théorème 1 Supposons que $\boldsymbol{A}$ est une matrice $(n \times n)$:

a) Si une ligne ou une colonne de $\boldsymbol{A}$ possède seulement des éléments nuls alors $det\,\boldsymbol{A} = 0$.

b) Si $\boldsymbol{A}'$ est obtenue à partir de $\boldsymbol{A}$ par l'opération $(E_i) \leftrightarrow (E_j)$, avec $i \neq j$, alors $det\,\boldsymbol{A}' = -det\,\boldsymbol{A}$.

c) Si $\boldsymbol{A}$ possède deux lignes identiques , alors $det\,\boldsymbol{A} = 0$.

d) Si $\boldsymbol{A}'$ est obtenue à partir de $\boldsymbol{A}$ par l'opération $(\lambda E_i) \rightarrow (E_i)$, alors $det\,\boldsymbol{A}' = \lambda det\,\boldsymbol{A}$.

e) Si $\boldsymbol{A}'$ est obtenue à partir de $\boldsymbol{A}$ par l'opération $(E_i + \lambda E_j) \longrightarrow (E_i)$, avec $i \neq j$, alors $det\,\boldsymbol{A}' = det\,\boldsymbol{A}$.

f) Si $\boldsymbol{B}$ est aussi une matrice $(n \times n)$. alors $det\,\boldsymbol{AB} = det\,\boldsymbol{A} \times det\,\boldsymbol{B}$.

Théorème 2 Si $A = (a_{ij})$ est une matrice $(n \times n)$ qui est soit triangulaire supérieure ou triangulaire inférieure (ou diagonale), alors $det\, A = \prod_{i=1}^{n} a_{ii} = a_{11} \times \cdots \times a_{nn}$.

De ce qui précède nous pouvons utiliser le schéma d'élimination des inconnues de la méthode de Gauss pour le calcul du déterminant de la matrice A.

Pour ce faire, il suffit de résoudre le système $A.x = 0$,(dont la solution unique si elle existe est $x = 0$) en le transformant en un système équivalent $A^{'}.x = 0$, où $A^{'}$ est une matrice triangulaire supérieure. Par conséquent on a que : $det\, A = (-1)^{p}\, det\, A^{'}$, où p **désigne le nombre de permutations de lignes** durant la procédure d'élimination des inconnues. En plus comme $A^{'}$ est une matrice triangulaire supérieure donc $det\, A^{'} = a_{11}^{(1)} \times a_{22}^{(2)} \times \cdots \times a_{nn}^{(n)}$.

En conclusion, **le déterminant de la matrice A est égal au produit des éléments pivots du schéma d'élimination de Gauss utilisé lors de la « triangularisation » de la matrice A :**

$$\boxed{det\, A = (-1)^{p}.a_{11}^{(1)} \times a_{22}^{(2)} \times \cdots \times a_{nn}^{(n)} .}$$

Comme exemple, nous pouvons voir que le déterminant de la matrice $\boldsymbol{A}$ du système (2.9) de l'exemple 2 précédent est donné par :

$det\,\boldsymbol{A} = (-1) \times (1) \times (4) \times (3) = -12$ ($\boldsymbol{p} = \boldsymbol{0}$, car il n'ya pas eu de permutations de lignes).

Enonçons maintenant, le résultat clé qui relie les notions de non singularité, de la méthode d'élimination de Gauss, les systèmes linéaires et les déterminants (la démonstration est fournie dans les livres de référence d'algèbre linéaire).

Théorème 3 Les énoncés suivants sont équivalents pour n'importe quelle matrice $\boldsymbol{A}\,(n \times n)$:

a) $det\,\boldsymbol{A} \neq 0$

b) L'équation $\boldsymbol{A}.\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ possède la solution unique $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$.

c) Le système linéaire $\boldsymbol{A}.\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ possède une solution unique quel que soit le vecteur colonne $\boldsymbol{b}$ de dimension n.

d) La matrice $\boldsymbol{A}$ est non singulière ; c.-à-d. $\boldsymbol{A}^{-1}$ existe.

e) L'algorithme de Gauss (l'élimination de Gauss avec permutations de lignes) peut être effectué avec succès sur le système linéaire $\boldsymbol{A}.\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ pour n'importe quel vecteur colonne $\boldsymbol{b}$ de dimension n.

Fin chapitre 2